Berekenbaarheid 2006, tentamen

woensdag 28 juni, 10.30–12.30

Er zijn acht opgaven die ieder tien punten opleveren, behalve opgave 1 en 8 die goed zijn voor vijftien punten. Tien punten zijn gratis, en het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door tien.

1. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een standaard Turing machine met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die uit de input alle b's verwijdert en de overgebleven a's tegen elkaar aan schuift.

   (Dus bij input *baaba* is de output *aaa*.)

2. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een non-deterministische 2-tape Turing machine die de taal

   $$L_2 = \{uuu \mid u \in \{a, b\}^*\}$$

   herkent, waarbij een correcte input ter lengte $3n$ in ten hoogste $5n + 6$ transities wordt geaccepteerd.

3. Definieer met behulp van de macro's op pagina 3 een Turing machine die de numerieke functie $f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door

   $$f_3(x, y) = x^2 \dot{-} y^2$$

   berekent.

4. Schrijf de functie $f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door

   $$f_4(x, y) = x^2 \dot{-} y^2$$

   als compositie van de primitief recursieve functies op pagina 4.

5. De primitief recursieve functie $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wordt gegeven door de volgende instantie van het schema voor primitieve recursie:

   $$\begin{aligned} f_5(0) &= 1 \\ f_5(y + 1) &= 3f_5(y) \dot{-} 1 \end{aligned}$$

Geef de waarde van $f_5(6)$.

Voorts kan de functie f_5 geschreven worden als

$$f_5 \quad = \quad \mathsf{primrec}(g, h)$$

voor functies g en h. Geef zulke g en h. Laat ook zien hoe je deze g en h kan schrijven als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.

6. De partiële functie $f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wordt gedefinieerd door

$$f_6(n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{als } 2n \text{ de som van twee priemgetallen is} \\ \uparrow & \text{als dit niet het geval is} \end{cases}$$

   (Bijvoorbeeld geldt dat $f_6(10) = 1$, want $2 \cdot 10 = 20 = 13 + 7$.)

   Laat zien dat f_6 een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 4 alle primitief recursief zijn.

7. Wat is de taal van het halting probleem L_H? Is deze taal recursief opsombaar? En is deze taal ook recursief? Motiveer beide antwoorden.

8. Het probleem P_8 is: gegeven een machine M moet er worden beslist of M met als input zijn eigen code $R(M)$ termineert. Laat zien dat P_8 onbeslisbaar is.

S	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
Z	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\dots B$
E	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\mathrm{P}_i^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\dots\quad\dots B$
$\mathrm{C}_m^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\dots\quad\dots B$
A	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
D	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\dots B$
SUB	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\dots\;B$
MR_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
ML_k	$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
FR	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
FL	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
E_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\dots\qquad\dots B$
T	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
INT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
MULT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\dots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\dots$
CPY_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\dots\qquad\dots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
$\mathrm{CPY}_{k,i}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\dots\qquad\dots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
BRN ($n=0$; $n>0$)	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$