Berekenbaarheid 2009, uitwerkingen toets 2

1. Bij ieder probleem P hoort een taal L_P: de taal van de inputs voor het probleem waarvoor het antwoord 'ja' is. Met deze correspondentie geldt dat:

$$P \text{ beslisbaar } \iff L_P \text{ recursief}$$

   omdat een machine die P beslist hetzelfde is als een machine die de taal L_P herkent en die voor iedere input stopt.

   Voor ieder onbeslisbaar probleem is dus de bijbehorende taal niet recursief. Neem als onbeslisbaar probleem het blank tape probleem B. Dan is

$$L_B = \{R(M) \mid M \text{ stopt met als input de lege tape}\}$$

   dus een niet-recursieve taal.

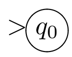
2. Er geldt

$$000000000 = R(M)w$$

   als we nemen

$$\begin{aligned} R(M) &= 000000 \\ w &= 000 \end{aligned}$$

   Deze $R(M)$ is de code van de Turing machine M gegeven door



   Dit is dus de machine met alleen de toestand q_0 en geen transities.

   De universele machine U zal met deze input de berekening van $M(000)$ simuleren. Deze berekening stopt natuurlijk meteen, en daarom zal ook U stoppen.

   Als U ook de corresponderende output produceert krijgen we dan

$$U(000000000) = U(R(M)000) = M(000) = 000$$

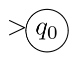
3. Het gaat hier om een eigenschap van de *taal* van M, want er wordt gevraagd of

$$L(M) \backslash L(M)^R \neq \emptyset$$

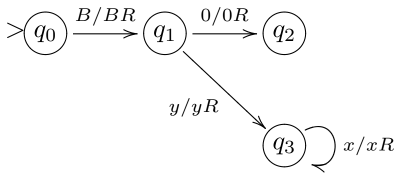
   Als we kunnen laten zien dat deze eigenschap niet-triviaal is, dan volgt de onbeslisbaarheid van dit probleem dus uit de stelling van Rice.

   Deze eigenschap is niet-triviaal, want hij geldt *niet* voor de taal $\{0,1\}^*$ en *wel* voor de taal $0\{0,1\}^*$ (want daarvoor geldt $01 \in 0\{0,1\}^*$, maar $10 \notin 0\{0,1\}^*$).

   Dus het probleem heeft antwoord 'nee' voor de Turing machine



en ‘ja’ voor de Turing machine



met $x \in \{B, 0, 1\}$ en $y \in \{B, 1\}$.