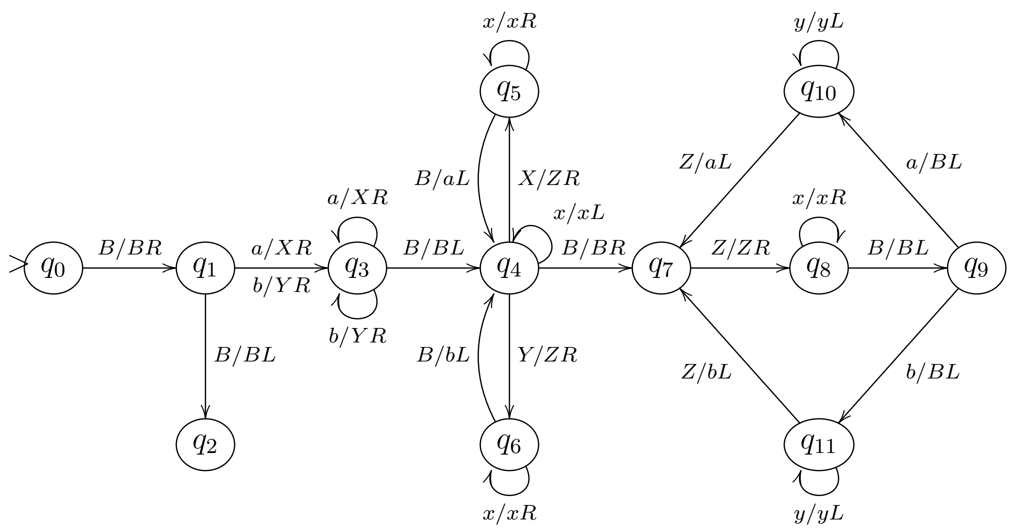
Berekenbaarheid 2016
Uitwerkingen Inhaaltoets
13 januari 2017

1. Definieer een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die zijn input achterstevoren zet, dus met $M_1(w) = w^R$ voor alle $w \in \{a, b\}^*$. Er moet bijv. gelden $M_1(\lambda) = \lambda$ en $M_1(abbab) = babba$. Als je wil mag je hulpsymbolen gebruiken, en je hoeft de tape niet terug te spoelen.

   Een mogelijke oplossing M_1 met tape alfabet $\Gamma = \{B, a, b, X, Y, Z\}$ is:



   In deze machine is $x \in \{a, b, Z\}$ en $y \in \{a, b\}$.

2. Het probleem P_2 heeft de vorm:

   > Input: Een code $R(M)$ van een deterministische Turing-machine.
   >
   > Vraag: Bestaat er een input $w \in \{0, 1\}$ met $M(w) = w^R$?

   Is dit probleem onbeslisbaar? Zo ja, laat zien waarom dit zo is. Zo nee, geef aan hoe P_2 te beslissen is.

   Het probleem P_2 is onbeslisbaar, en we laten dat zien door het blank tape probleem B te reduceren naar P_2.

Dus stel dat we een machine M hebben waarvoor we willen weten of $M(\lambda)\downarrow$. We maken hierbij een M' zodat geldt:

$$M(\lambda)\downarrow \iff \text{er bestaat een input } w \in \{0,1\} \text{ met } M'(w) = w^R$$

Een constructie die hiervoor werkt is om M' te laten zijn:

(a) wis input
(b) doe M
(c) wis output van M

Het zal duidelijk zijn dat deze M' aan de gevraagde equivalentie voldoet. Als M stopt op de lege tape dan geldt $M'(\lambda) = \lambda = \lambda^R$, en als M niet stopt op de lege tape dan stopt M' voor geen enkele input, dus geldt voor geen enkele w dat $M'(w) = w^R$.

(Om M' te laten weten waar gewist moet worden in stap (c) is lastig. Als deze subtiliteit niet in de uitwerking is vermeld dan worden daar geen punten voor afgetrokken.

Een mogelijke aanpak hiervoor is om iedere transitie van M te vervangen door *twee* transities in dezelfde richting in M', waarbij op de oneven posities op de tape met een 0 of 1 wordt gemarkeerd dat de kop daar geweest is, en waarbij deze markering voor het eerste vakje met een 0 wordt gedaan, terwijl dit verder met een 1 wordt gedaan.)

3. De unaire numerieke functie f_3 zet zijn input achterstevoren als een decimaal getal. Er geldt bijv. $f_3(0) = 0$, $f_3(10) = 1$ en $f_3(2017) = 7102$. Laat zien dat f_3 primitief recursief is. Je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn. (Hint: het kan handig zijn een aantal hulpfuncties te definiëren, die natuurlijk zelf ook allemaal primitief recursief moeten zijn.)

   We definiëren de volgende primitief recursieve functies:

$$n(x) = \mathsf{pred}(\mu i \le x, \mathsf{lt}(x, 10^i))$$

   Deze functie geeft het aantal cijfers van x min één, ofwel de exponent horend bij het meest significante cijfer van x.

$$d(x,i) = \mathsf{rem}(\mathsf{quo}(x, 10^i), 10)$$

Deze functie geeft het i-de cijfer van x, tellend vanaf nul en vanaf links.

Met deze twee functies kunnen we nu schrijven:

$$f_3(x) = \sum_{i=0}^{n(x)} d(x, n(x) \dot{-} i) \cdot 10^i$$

Dat al deze drie functies primitief recursief zijn volgt uit het feit dat in deze definities alleen primitief recursieve functies en begrensde operatoren zijn gebruikt.